



۱) معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x + 4 \sin x - 3}{\sin x - 1} = 3$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲) مجموع جواب‌های متمایز معادله $\cos 2x + \cos^2 x + 4 \sin x = 3$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) 2π ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) π

۳) جواب کلی معادله $\tan 4x = \frac{1}{\tan(4x + \frac{\pi}{3})}$ کدام است؟

- ۱) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{24}$ ۳) $x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ ۴) $x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$

۴) مجموعه جواب معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x = \sin x$ نمایانگر رأس‌های کدام شکل روی دایره مثلثاتی است؟

- ۱) متوازی‌الاضلاع ۲) پاره خط ۳) دوزنقه ۴) مربع

۵) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{3}(\tan^2 x - 1) + 2 \tan x = 0$ کدام است؟

- ۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۳) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ۴) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

۶) مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

۷) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

- ۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۲) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۸) معادله $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹) اگر جواب معادله مثلثاتی $2 \cos^3 x = \cos x$ به صورت $x = k\pi + \frac{i\pi}{4}$ باشد، مجموعه‌ی مقادیر i کدام است؟

- ۱) $\{1, 2, 0\}$ ۲) $\{0, 1\}$ ۳) $\{1, 2, 3\}$ ۴) $\{1, 2\}$

۱۰) یکی از جواب‌های کلی معادله $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ کدام است؟

- ۱) $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۲) $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۳) $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ ۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱۱) معادله $\tan 2x = 3 \tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{4})$ چند جواب دارد؟

- ۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۹



۱۲) معادله $\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{1}{12}$ در فاصله $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۳) جواب کلی معادله $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 3\cos x = 1$ کدام است؟

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴)

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲)

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۱)

۱۴) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ کدام است؟

$x = \frac{k\pi}{2}$ (۴)

$x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۳)

$x = k\pi$ (۲)

$x = \frac{2k\pi}{3}$ (۱)



پاسخ نامه تشریحی

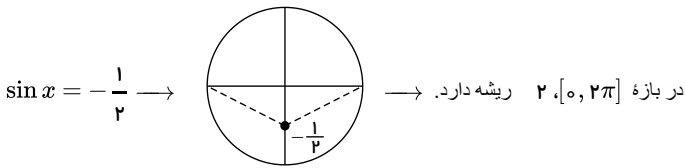
می دانیم $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\frac{\cos 2x + 4\sin x - 3}{\sin x - 1} = 3 \rightarrow \cos 2x + 4\sin x - 3 = 3\sin x - 3$$

$$\rightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

جمع ضرایب صفر است پس یک ریشه معادله $\sin x = 1$ و ریشه دیگر $\sin x = -\frac{1}{2}$ است.

غقوق (مخرج را صفر می کند.) $\sin x = 1$



می دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ و $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\cos 2x + \cos^2 x + 4\sin x = 3 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x + 4\sin x = 3$$

$$\rightarrow 3\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 3A^2 - 4A + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} A = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow \sin x = \frac{1}{3} \rightarrow \text{دو جواب مکمل دارد.} \end{cases} \quad \text{در بازه } [0, \pi]$$

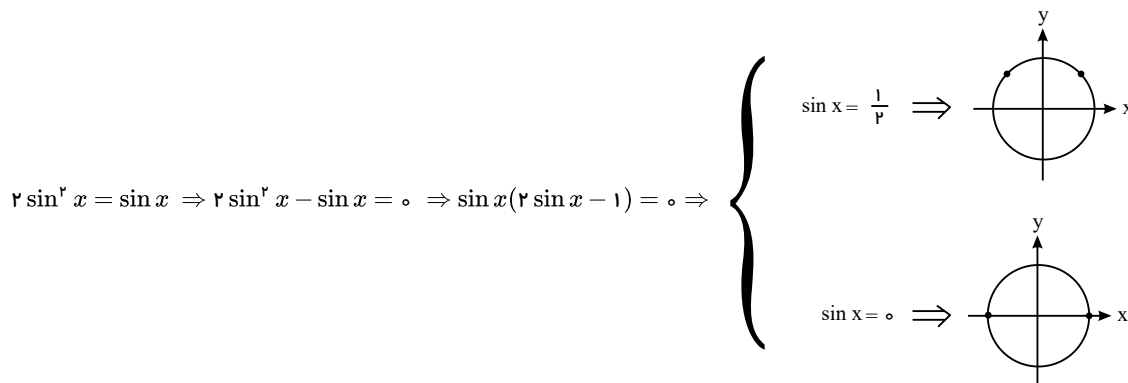
پس مجموع جواب ها برابر $\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

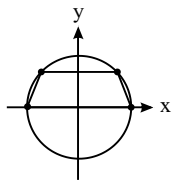
$$\tan 4x = \frac{1}{\tan(4x + \frac{\pi}{4})} = \cot(4x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \tan 4x = \tan(\frac{\pi}{4} - (4x + \frac{\pi}{4}))$$

$$\tan 4x = \tan(\frac{\pi}{4} - 4x) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} - 4x \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{32}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴



پس در مجموع داریم:



یک دوزنقه تشکیل می‌شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

می‌دانیم: $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

$$\sqrt{3}(\tan^2 x - 1) + 2 \tan x = 0 \rightarrow 2 \tan x = \sqrt{3}(1 - \tan^2 x)$$

$$\rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

می‌دانیم $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

می‌دانیم: $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a, \sin 2a = 2 \sin a \cos a, 1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin 2x \rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \sin 2x$$

$$\rightarrow \cos 2x = 1 - \sin 2x \rightarrow \sin 2x = 1 - \cos 2x \rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0 \rightarrow 2 \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

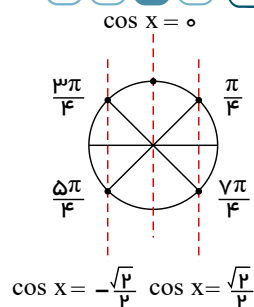
$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos x = \sin x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

بنابراین معادله در بازه‌ی داده شده دارای پنج جواب است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$2 \cos^2 x = \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$





با توجه به شکل این معادله سه جواب کلی به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ دارد بنابراین مجموعه مقادیر i را می‌توان به صورت $\{1, 2, 3\}$ در نظر گرفت.

$$\begin{aligned}\sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1\end{aligned}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0 \rightarrow 1 + \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\rightarrow (\sin x + \cos x) + 2 \cos x (\sin x + \cos x) = 0 \rightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 1 + 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \text{ می‌دانیم.}$$

$$\tan 2x = 2 \tan x \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2 \tan x \rightarrow 2 \tan x = 2 \tan x (1 - \tan^2 x) \rightarrow 2 \tan x = 2 \tan x - 2 \tan^3 x \rightarrow 2 \tan^3 x - \tan x = 0$$

$$\rightarrow \tan x (2 \tan^2 x - 1) = 0 \rightarrow \tan x = 0 \text{ یا } 2 \tan^2 x - 1 = 0$$

$$\tan x = 0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \rightarrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \rightarrow x = \pi, 2\pi \text{ جواب ۲}$$

$$\begin{aligned}2 \tan^2 x - 1 = 0 &\Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \tan\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \rightarrow x &= \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}, \pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4} \text{ جواب ۵}\end{aligned}$$

در کل معادله در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ دارای ۷ جواب است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

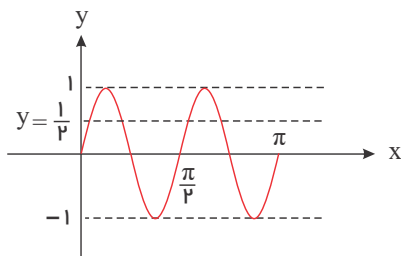
می‌دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ و $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ است.

$$\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x = \frac{1}{12} \Rightarrow \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2(2x) = \frac{1}{12} \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{3}$$

پس معادله به فرم $\sin 4x = \frac{1}{3}$ در می‌آید. نمودار $y = \sin 4x$ از انقباض افقی نمودار $y = \sin x$ با ضریب ۴ به دست می‌آید. در این صورت مطابق شکل زیر، نمودارهای

$y = \frac{1}{3}$ و $y = \sin 4x$ در ۴ نقطه تلاقی دارند. پس معادله دارای ۴ ریشه است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 3 \cos x = 1 \rightarrow \cos 2x + 3 \cos x = 1$$

حال با کمک رابطه $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ داریم:

$$2 \cos^2 x - 1 + 3 \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow (\cos x + 2)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ غ ق ق } (-1 \leq \cos x \leq 1) \\ 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

دقت کنید معادله $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$ را از راه Δ نیز می‌توانید حل کنید.



می‌دانیم $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \rightarrow \frac{3}{4} \sin^2 2a = 1 \rightarrow \sin^2 2a = \frac{4}{3}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 \rightarrow -\frac{3}{4} \sin^2 2x = 0$$

$$\rightarrow \sin^2 2x = 0 \rightarrow \sin 2x = 0 \xrightarrow{\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi} 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴